TD n° 3 – Espaces quotients et revêtements universels

Intégration sur les espaces quotients

On rappelle le résultat suivant du cours : si T est un espace topologique muni d'une mesure borélienne μ, et Γ est un groupe discret agissant sur T en préservant μ, alors pour toute fonction χ positive à décroissance rapide vérifiant

$$\sum_{g\in\Gamma} \chi(g \cdot x) = 1, \quad \forall x \in T,$$

on définit l'intégrale d'une fonction f Γ-invariante par

$$\int_{\Gamma\backslash T} f(x)d\mu(x) = \int_T f(x)\chi(x)d\mu(x).$$

Exercice 1. *Intégration sur le cercle unité*

1. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\phi : S^1 \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ entre le cercle unité $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ et le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
2. En déduire, pour toute fonction $f : S^1 \to \mathbb{C}$ continue, une expression de
$$\int_{S^1} f(z)d\mu(z),$$
où $d\mu$ désigne la mesure uniforme sur S^1 (appelée aussi *mesure de Haar* dans ce contexte).
3. Montrer que l'image de $d\mu$ par la transformation de Cayley $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ définie par
$$\varphi(z) = \frac{1-z}{1+z},$$
est la mesure de Cauchy :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi(e^{\mathrm{i}\theta}))d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{i}t)\frac{dt}{1+t^2}.$$
4. On pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^k$. En utilisant la théorie des séries de Fourier, démontrer que toute fonction $f \in L^2(d\mu)$ admet un développement sous la forme
$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_k\rangle_{L^2(d\mu)}\phi_k(z), \quad \forall z \in S^1.$$

Relèvements de chemins

Soit $\Sigma_g = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ une surface hyperbolique compacte de genre $g \geq 2$. On rappelle que deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \Sigma_g$ sont homotopes s'il existe une application continue $\phi : [0, 1]^2 \to \Sigma_g$ telle que $\phi(t, 0) = \gamma_1(t)$ et $\phi(t, 1) = \gamma_2(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ (autrement dit si on peut déformer continûment γ_1 en γ_2 en préservant l'orientation). Un lacet de base $x \in \Sigma_g$ est un chemin $\gamma : [0, 1] \to \Sigma_g$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Un lacet est contractile (ou d'homotopie triviale) s'il est homotope à un point.

Le *groupe fondamental* de Σ_g base x est le groupe des classes d'équivalence d'homotopie des lacets de base x, pour la loi de produit

$$[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1 \cdot \gamma_2],$$

en notant $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ la concaténation des lacets γ_1 et γ_2.

On admet les résultats suivants :

— (propriété de relèvement) pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to \Sigma_g$ d'origine x, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{H}^2$ d'origine $\tilde{x}$ tel que $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$ (où $\pi : \mathbb{H}^2 \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ désigne la projection sur le quotient). On appelle *relèvement de* γ de base $\tilde{x}$ le chemin $\tilde{\gamma}$.
— Deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \Sigma_g$ d'origine x sont homotopes si et seulement si $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ d'origine $\tilde{x} \in \mathbb{H}^2$ sont homotopes.
— Deux chemins de mêmes extrémités dans $\mathbb{H}^2$ sont homotopes (on dit que $\mathbb{H}^2$ est simplement connexe).

Exercice 2. *Homotopie et relèvement*

1. Si γ est un chemin dans Σ_g d'origine x et si $\tilde{\gamma}$ est son unique relèvement d'origine $\tilde{x}$, on définit l'application Φ entre les classes d'homotopie d'origine x et $\mathbb{H}^2$, par
$$\Phi : [\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1).$$
Montrer que Φ est une bijection.
2. Montrer que si $\Sigma_g = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, alors $\pi_1(\Sigma_g) \simeq \Gamma$. Indication : montrer qu'on a une bijection entre Γ et $\pi_1(\Sigma_g)$ en utilisant la question précédente, et vérifier que c'est bien un morphisme de groupes.

Exercice 3. *Homotopie libre et géodésiques*

L'objectif de cet exercice est de démontrer que toute classe d'homotopie libre (c'est-à-dire en ne fixant plus le point de base dans le groupe fondamental) de Σ_g pour $g \geq 2$ admet un unique représentant géodésique. Pour cela, on introduit pour toute isométrie hyperbolique $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ son *axe*, à savoir l'unique géodésique qui passe par ses deux points fixes (lesquels sont toujours sur $\partial\mathbb{H}^2$).

1. Soit $\gamma : [0,1] \to \Sigma_g$ un lacet de base x. Montrer qu'on peut déformer son relevé $\tilde{\gamma}$ issu de $\tilde{x}$ en un segment de la courbe qui passe par $\tilde{x}$ et $[\gamma] \cdot \tilde{x}$ dont tous les points sont équidistants de l'axe de $[\gamma]$.
2. Montrer qu'on peut déplacer ce segment par translations successives pour le faire arriver sur l'axe de γ, et en déduire que le résultat γ^* est bien un représentant géodésique de la classe d'homotopie libre de γ.
3. Soit γ' une autre courbe de la même classe d'homotopie libre que γ^*. Montrer que ce n'est pas une géodésique. Indice : utiliser le fait que $[\gamma]$ agit par translation sur le disque ou le demi-plan, et appliquer cette translation aux chemins qui représentent l'homotopie entre γ^* et γ'.
4. Trouver une géodésique sur Σ_2 qui a la forme d'un 8 (autrement dit, qui est fermée et possède un point d'auto-intersection).